

SAP2000 预应力混凝土梁分析的验证算例

筑信达 张志国

本文以图 1 所示的混凝土简支梁为例，主要介绍 SAP2000 中预应力钢筋采用的一种预应力损失计算方法，同时对比理论计算与 SAP2000 框架单元、壳单元和实体单元的结果差异，包括跨中截面的弯矩、挠度以及截面顶部和底部的正应力。本算例取自 CSI Analysis Verification Examples 1-009/2-020/5-009，关于预应力损失的更多计算方法，我们会在后续的文章中一一介绍。

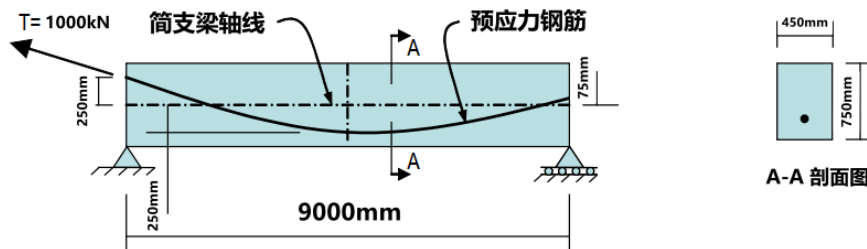


图 1 混凝土简支梁及预应力钢筋示意图

1. 基本信息

如图 1 所示，本例采用后张法张拉预应力钢筋的左端，预拉力 $T=1000\text{kN}$ 。混凝土的弹性模量为 $E_c=25\text{GPa}$ ，预应力钢筋的弹性模量为 $E_p=200\text{GPa}$ 。根据混凝土简支梁的截面尺寸以及预应力钢筋的直径可计算以下截面常数：

- 横截面面积 $A_c = BH = 337500\text{mm}^2$
- 截面惯性矩 $I = BH^3 / 12 = 1.582 \times 10^{10}\text{mm}^4$
- 截面剪切面积 $A_s = 5A_c / 6 = 281250\text{mm}^2$
- 预应力钢筋的横截面面积 $A_p = 1000\text{mm}^2$

此外，本算例仅考虑预应力钢筋弹性收缩和孔道摩擦引起的预应力损失，忽略锚具变形、混凝土收缩和徐变以及预应力钢筋应力松弛产生的预应力损失。关于孔道摩擦引起的预应力损失，预应力钢筋与孔道壁之间的摩擦系数（即曲率系数）为 0.15，考虑孔道单位长度局部偏差的摩擦系数（即摆动系数）为 0.004/m。

2. 理论计算

2.1 预应力钢筋的几何参数

如图 2 所示，以混凝土简支梁轴线的最左端作为坐标原点，自左向右为 X 轴正方向。根据预应力钢筋在简支梁左端、右端和跨中截面处的偏心距，计算预应力钢筋的抛物线方程及其左右两端的斜率和转角。

预应力钢筋的抛物线方程：

$$e(x) = \left(\frac{1650}{9000^2} \right) x^2 - \left(\frac{1825}{9000} \right) x + 250$$

预应力钢筋左端的斜率和转角：

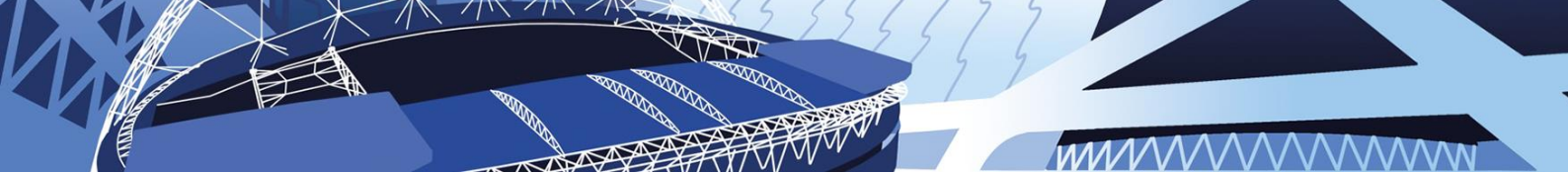
$$\text{斜率 } k_L = -0.2080, \quad \text{转角 } \theta_L = \text{Atan}(k_L) = -11.463^\circ = -0.200\text{rad}$$

预应力钢筋右端的斜率和转角：

$$\text{斜率 } k_R = 0.1639, \quad \text{转角 } \theta_R = \text{Atan}(k_R) = 9.307^\circ = 0.1624\text{rad}$$

2.2 预应力钢筋的预应力损失

孔道局部偏差引起的预应力损失比为 $0.004 \times 9 = 0.036$ ，预应力钢筋与孔道壁之间的摩擦产生的预应力损失比为 $0.15 \times (\theta_R -$



$\theta_L=0.05438$ ，据此计算预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失。

预应力钢筋弹性收缩前简支梁左端的等效轴向荷载：

$$N_{0L} = 1000 \cos(11.463^\circ) = 980 \text{ kN}$$

预应力钢筋弹性收缩前简支梁右端的等效轴向荷载：

$$N_{0R} = 1000(1 - 0.05438 - 0.036) \cos(9.307^\circ) = 897.6 \text{ kN}$$

混凝土简支梁的轴向变形：

$$\Delta_c = \frac{N_{0L} + N_{0R}}{2E_c A_c} L = 1.00 \text{ mm}$$

预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失：

$$\frac{E_p A_p \Delta_c}{L} = 22.25 \text{ kN} \text{ 或 } \frac{E_p \Delta_c}{L} = 22.25 \text{ MPa}$$

2.3 预应力钢筋的等效荷载

考虑上述三种预应力损失，计算预应力钢筋在简支梁左右两端的三个等效荷载分量。

预应力钢筋弹性收缩后简支梁左端的等效荷载：

$$N_L = (1000 - 22.25) \cos(11.463^\circ) = 958.25 \text{ kN}$$

$$V_L = (1000 - 22.25) \sin(11.463^\circ) = 194.31 \text{ kN}$$

$$M_L = 250 \text{ mm} \times N_L = 239.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

预应力钢筋弹性收缩后简支梁右端的等效荷载：

$$N_R = (1000(1 - 0.05438 - 0.036) - 22.25) \cos(9.307^\circ) = 875.69 \text{ kN}$$

$$V_R = (1000(1 - 0.05438 - 0.036) - 22.25) \sin(9.307^\circ) = 143.51 \text{ kN}$$

$$M_R = 75 \text{ mm} \times N_R = 65.68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

为简化手算过程，本例假设简支梁内部的等效荷载均匀分布。该假设会引入一定的计算误差，全部等效荷载无法组成自平衡体系，存在微小（约 6kN）的竖向支座反力。

$$\text{轴向均布荷载: } \frac{N_L - N_R}{L} = 9.17 \text{ kN / m}$$

$$\text{竖向均布荷载: } \frac{V_L + V_R}{L} = 37.54 \text{ kN / m}$$

综上，预应力钢筋在混凝土简支梁左右两端产生的等效集中荷载和在简支梁内部产生的等效均布线荷载，如图 2 所示。

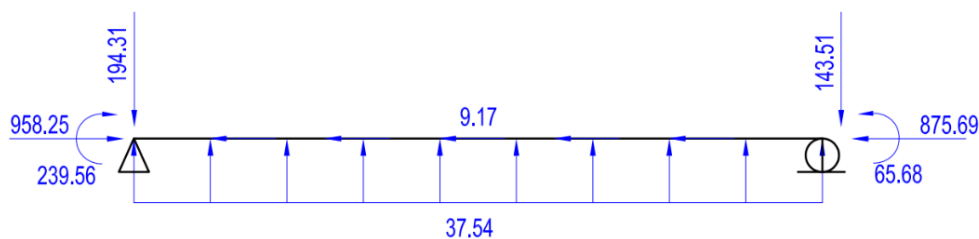


图 2 预应力钢筋的等效荷载示意图（理论计算）

2.4 混凝土简支梁的内力和挠度计算

如图 2 所示，根据预应力钢筋的等效荷载计算跨中截面的弯矩、挠度以及截面顶部和底部的正应力。

根据静定结构的平衡方程计算跨中截面的弯矩：

$$M_c = 65.68 + 37.54 \times 4.5^2 / 2 - 143.54 \times 4.5 - 6 \times 4.5 = -227 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据跨中截面的弯矩和轴力计算截面顶部和底部的正应力：

$$\sigma_{top} = \frac{M_c}{I} \frac{H}{2} + \frac{N_R + N_L}{2A_c} = 2.675 \text{ MPa (拉应力)}$$

$$\sigma_{bot} = -\frac{M_c}{I} \frac{H}{2} + \frac{N_R + N_L}{2A_c} = -8.109 \text{ MPa (压应力)}$$

利用单位荷载法计算跨中截面的挠度（同时考虑弯曲变形和剪切变形）：

$$U_z = \int_0^L \frac{\bar{M} M_P}{E_c I} dx + \int_0^L \frac{\bar{F}_s F_{SP}}{G_c A_s} dx = 4.34 \text{ mm (反拱)}$$

3. SAP2000 数值解

SAP2000 提供预应力钢筋的两种模拟方法，即：荷载法和单元法。荷载法以等效荷载的方式计算结构响应，忽略钢筋本身的刚度、质量和重量，仅适用于线性分析。单元法以钢束单元的等效应变荷载计算结构响应，可以考虑钢筋本身的刚度、质量和重量，既可用于线性分析，也可用于非线性分析。

本算例为线性分析，上述两种方法均适用，后续也会对比两种方法的计算结果。采用荷载法时，用户应输入预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失，如图 3 所示。采用单元法时，SAP2000 自动计算预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失，用户输入 0 即可。

Tabular Data	
Load Pattern	PRE
Load Type	Force
Jack From This Location	I-End (Start)
Tendon End Force (KN)	1000.
Tendon End Stress (KN/m2)	
Curvature Coefficient (Unitless)	0.15
Wobble Coefficient (1/m)	4.000E-03
Anchorage Set Slip (m)	0.
Loss - Elastic Shortening Stress (KN/m2)	22250.
Loss - Creep Stress (KN/m2)	0.
Loss - Shrinkage Stress (KN/m2)	0.
Loss - Steel Relaxation Stress (KN/m2)	0.

Units: KN, m, C

Show Prestress Losses

Done

图 3 预应力钢筋的预拉力和预应力损失

如图 4 所示，对比 SAP2000 和前文理论计算的预应力钢筋的等效荷载（图 2）可以看出，借助钢束离散化及其数值算法，SAP2000 可以更准确地计算简支梁内部非均布的等效线荷载，以此规避“全部等效荷载无法组成自平衡体系”所引起的误差。

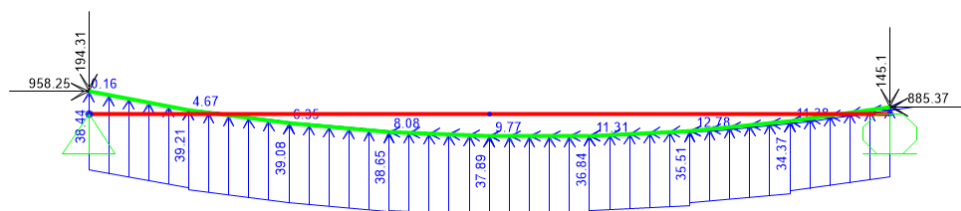
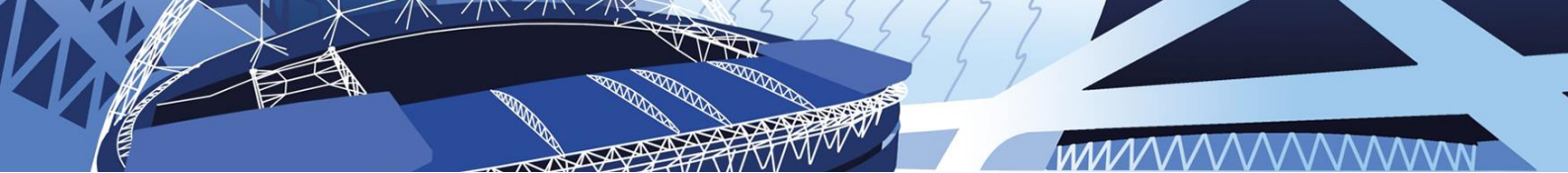


图 4 预应力钢筋的等效荷载示意图（SAP2000）



3.1 框架单元

如图 5 所示，为了快速准确地输出跨中截面的计算结果，建议将简支梁二等分生成中间节点，但无需进一步细化以增加单元数量。预应力钢筋的最大离散化长度会影响等效荷载和钢束单元的计算精度，荷载法采用的最大离散化长度为 1.5m，单元法采用的最大离散化长度为 1.5m 和 0.3m。

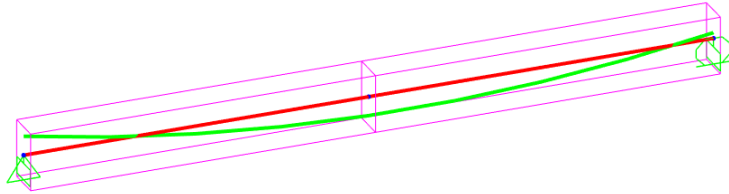


图 5 框架单元计算模型

如表 1 所示，荷载法的计算精度略低于单元法；随着预应力钢筋的最大离散化长度逐步减小，单元法的计算精度逐步提高。由于前述理论计算采用“简支梁内部的等效均布荷载”假定，后续表 1~3 中的“理论解”本身存在误差。因此，误差为 0% 也不代表 SAP2000 的计算结果就是真实解，此处可以理解作为一种“巧合”。换言之，如果继续减小预应力钢筋的离散化长度（如 0.1m），基于“理论解”的计算误差可能反而会增大，但计算精度却是在提高，因为 SAP2000 在逐步逼近一个未知的难以手算的真实解。

表 1 框架单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.46	4.34	2.8%
单元法（1.5m）		4.26		-1.8%
单元法（0.3m）		4.34		0.0%
荷载法	跨中弯矩	-234	-227	3.1%
单元法（1.5m）		-230		1.3%
单元法（0.3m）		-227		0.0%

3.2 壳单元

如图 6 所示，为了提高壳单元的计算精度，本例采用的网格密度为“沿高度 4 等分，沿跨度 10 等分”。荷载法和单元法采用的预应力钢筋的最大离散化长度均为 0.3m。

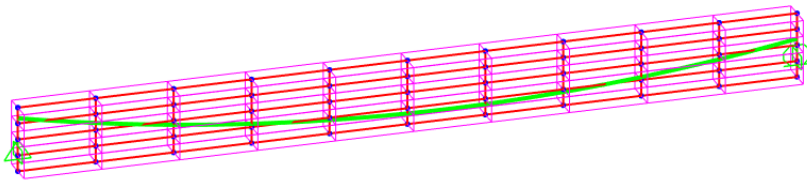
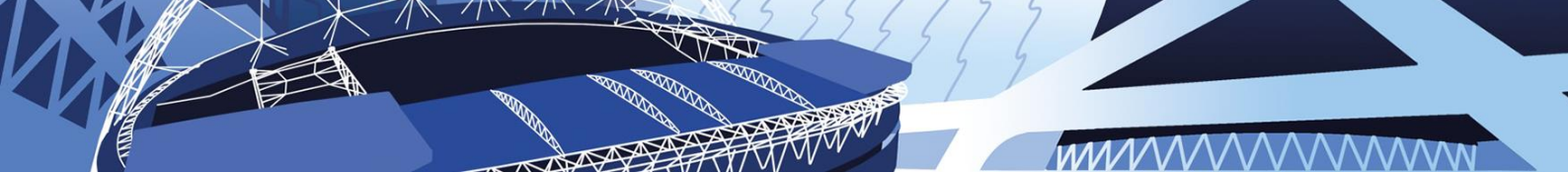


图 6 壳单元计算模型

如表 2 所示，SAP2000 壳单元的计算结果与理论解之间的微小误差与理论计算中采用的“简支梁内部的等效均布荷载”假定有关。框架单元和壳单元采用的力学基础不同，二者无法获得完全相同的结果。例如：壳单元可以考虑沿截面高度的拉压变形及其应力，但框架单元采用的平截面假定无法考虑这一点。

表 2 壳单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.31	4.34	-0.7%
单元法		4.21		-3.0%
荷载法	顶部正应力	2.723	2.675	1.8%



单元法		2.643		-1.2%
荷载法	底部正应力	-8.235	-8.109	1.6%
单元法		-8.004		-1.3%

3.4 实体单元

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。由于简支梁以弯曲变形为主，故采用非协调实体元提高计算精度。如图 7 所示，为了提高实体单元的计算精度，本例采用的网格密度为“沿高度 4 等分，沿跨度 10 等分，沿厚度 2 等分”。荷载法和单元法采用的预应力钢筋的最大离散化长度均为 0.3m。

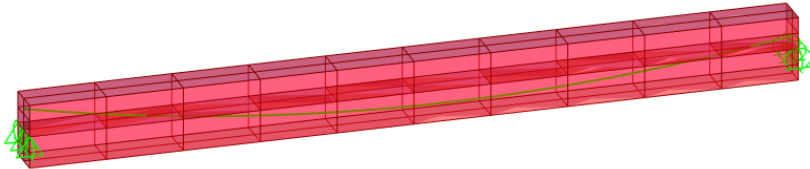


图 7 实体单元计算模型

如表 3 所示，SAP2000 实体单元的计算结果与理论解之间的微小误差与理论计算中采用的“简支梁内部的等效均布荷载”假定有关。壳单元和实体单元采用的力学基础不同，二者也无法获得完全相同的结果。例如：实体单元可以考虑沿截面宽度由泊松效应引起的拉压变形及其应力，但壳单元采用的厚度不变假定无法考虑这一点。

表 3 实体单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.30	4.34	-0.9%
单元法		4.20		-3.2%
荷载法	顶部正应力	2.629	2.675	-1.7%
单元法		2.549		-4.7%
荷载法	底部正应力	-8.151	-8.109	0.5%
单元法		-7.920		-2.3%

4. 小结

- 1) 通过定义预应力钢筋的曲率系数和摆动系数，SAP2000 可以准确计算孔道摩擦和局部偏差引起的预应力损失。此外，SAP2000 也可以计算锚具变形引起的预应力损失，但本算例未涉及。
- 2) 对于混凝土的收缩和徐变、预应力钢筋的应力松弛和弹性收缩所引起的预应力损失，如果采用荷载法，用户需要手动输入；如果采用单元法，SAP2000 可以自动计算。
- 3) 由于抛物线形的预应力钢筋在理论计算时引入“等效均布线荷载”的简化假定，SAP2000 框架单元、壳单元和实体单元的计算结果与理论解略有差异，最大误差不足 5%。如果采用直线形的预应力钢筋，在理论计算中无需引入上述假定，SAP2000 可以输出与理论解完全相同的计算结果。
- 4) 本算例以“线性分析”计算预应力钢筋产生的等效荷载及构件的内力和挠度，故荷载法和单元法均可采用。如果用户需要在后续计算中利用阶段施工分析考虑混凝土或钢筋的时变属性，则只能采用单元法。整体来讲，单元法的适用范围更广，计算精度更高，但计算量往往也更大。

参考资料

[1] CSI Analysis Reference Manual[M]. 2017
[2] 顾祥林. 混凝土结构基本原理[M]. 上海：同济大学出版社, 2004